


A Ficha+Aulas de Complexos inclui 5 aulas teóricas e 59 exercícios em vídeo. Todos os direitos de autor estão reservados para o autor Rui Castanheira de Paiva ([ruipai-vac@gmail.com](mailto:ruipai-vac@gmail.com), [www.academiaaberta.pt](http://www.academiaaberta.pt) e [www.facebook.com/aaberta](https://www.facebook.com/aaberta)). A ficha também está disponível em [www.academiaaberta.pt](http://www.academiaaberta.pt) juntamente com outros conteúdos interativos e fórum de tira dúvidas. Recomendamos que a utilize de acordo com a seguinte sequência:

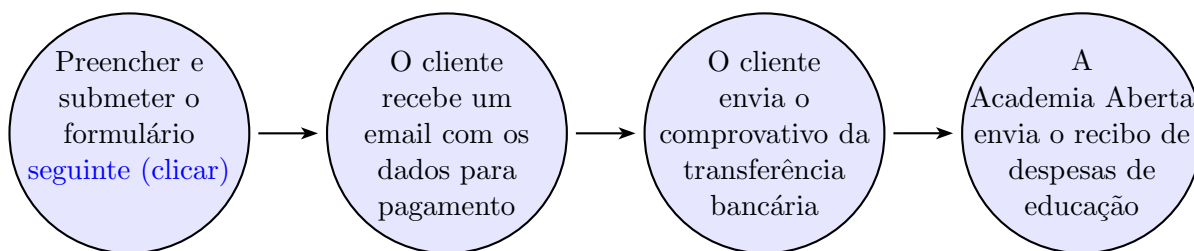
Vídeo da aula → Resolver os exercícios → Confirmar resultados nos vídeos

Para visualizar a resolução dum exercício deve clicar no ícone  junto ao mesmo.

Os vídeos associados a esta ficha de trabalho têm acesso gratuito. Quando compra um conteúdo à Academia Aberta contribui para a manutenção e melhoria do site, aquisição de equipamento e software e para mostrar aos autores a sua gratidão!

*Quem acolhe um benefício com gratidão, paga a primeira prestação da sua dívida.  
(Sêneca, 04 a.C.-65).*

Caros estudantes, professores, explicadores, pais e amantes da matemática, podem contribuir para a Academia Aberta através da compra voluntária da licença de utilização desta obra ( $\geq 3$  euros ou  $\geq 12$  reais). O pagamento pode ser feito por transferência bancária ou Paypal. Para tal, deve preencher o seguinte [formulário \(clique\)](#). Depois de o fazer receberá um email com a informação necessária.



## AULA 1: Primitivas e primitivas imediatas/antiderivadas

### Sumário/pré-requisitos

#### Primitivas/antiderivadas:

- Noção de primitiva/antiderivada. Primitivas imediatas.

#### Pré-requisitos:

O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 1 clique em .

**ATENÇÃO:** Há uma tabela de primitivas imediatas na última página desta ficha.

1.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

- (a)  $x^3 + 3x^2 - 4$  (b)  $\frac{x^3 + x + 2}{\sqrt{x}}$  (c)  $\cos x e^{\sin x}$
- (d)  $\sin x \cos x$  (e)  $\sin^2 x \cos x$  (f)  $\frac{e^{2x}}{4 + e^{2x}}$
- (g)  $\frac{\ln x}{x}$  (h)  $\tan^2(x) \sec^2(x)$  (i)  $\sin(4x)$
- (j)  $x \cos(4x^2)$  (l)  $\frac{3x}{1 + x^2}$  (m)  $\frac{2}{1 + x^2}$
- (n)  $\frac{3}{4 + x^2}$  (o)  $\frac{x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}$  (p)  $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$
- (q)  $x7^{x^2}$  (r)  $\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$  (s)  $\frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$
- (t)  $-\frac{6x^2}{\sqrt{4 - 16x^6}}$  (u)  $\frac{x}{\cos^2(x^2)}$  (v)  $\frac{1 - 2x}{\sqrt{9 - x^2}}$
- (w)  $\frac{1}{x \ln x}$  (x)  $\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}$  (z)  $\frac{x^3}{x^8 + 5}$
- (a2)  $\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$  (b2)  $(2e^{x+1} + 10x)^3 (e^{x+1} + 5)$  (c2)  $e^{x^2-3x} (2x - 3)$
- (d2)  $\frac{(\ln(x) - 4)^4}{x}$  (e2)  $\frac{\ln(x)}{x(\ln^2(x) + 3)}$

## AULA 2: Primitivas por partes

### Sumário/pré-requisitos

#### Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas por partes.











#### Pré-requisitos:

O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 2 clique em

2.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

- (a)  $x \cos x$   (b)  $x \sin x$   (c)  $\arccos x$  
- (d)  $x^2 \cos x$   (e)  $x \ln x$   (f)  $xe^x$  
- (g)  $e^x \sin x$   (h)  $\ln x$   (i)  $\ln^2(x)$  
- (j)  $x^2e^x$  

### AULA 3: Primitivas por substituição

#### Sumário/pré-requisitos


##### Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas por substituição.

##### Pré-requisitos:






O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 3 clique em .

**ATENÇÃO:** Há uma tabela de primitivas por substituição no fim desta ficha.

3.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

- (a)  $\sqrt{4 - 4x^2}$ ,  $x = \cos t$   (b)  $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x = \sin t$  
- (c)  $\frac{1}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$ ,  $x = 2 \tan t$   (d)  $\frac{3^{2x} - 3^x - 2}{3^x}$ ,  $t$   $3^x = t$  
- (e)  $\ln(\sqrt{1+x^2})$ ,  $x = \tan t$  (f)  $\sqrt{\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}}$ ,  $e^x = t^2 + 1$  

## AULA 4: Primitivas de potências de funções trigonométricas

### Sumário/pré-requisitos


#### Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas de potências de funções trigonométricas.

#### Pré-requisitos:


O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.





Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 4 clique em .


**ATENÇÃO:** Há uma tabela de primitivas de funções trigonométricas no fim desta ficha.


4.1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas:


(a)  $\cos^2 x$  

(b)  $\sin^4(3x)$  

(c)  $\tan^2(4x)$  

(d)  $\sin^2 x$  

(e)  $\cos^4(2x)$  

(f)  $\cotg^2(3x)$  

**Próxima página:** Primitivas de frações racionais.

*www.academiaaberta.pt*

## AULA 5: Primitivas de frações racionais

### Sumário/pré-requisitos

#### Primitivas/antiderivadas:

- Primitivas de frações racionais.

#### Pré-requisitos:

O estudante deverá saber derivar muito bem e saber aplicar fórmulas matemáticas. Deverá também saber fazer primitivas imediatas.



Se tiver dificuldades em visualizar a Aula 5 clique em

5.1. Decomponha a fração  $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$  na soma de um polinómio com uma fração própria.

5.2. Calcule as primitivas das funções definidas pelas expressões analíticas.

(a)  $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^2 + 2} dx$

(b)  $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} dx$

(c)  $\int \frac{4 - 5x}{x^2 + 2x - 15} dx$

(d)  $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} dx$

(e)  $\int \frac{x^2 - x}{(x + 2)^2(x - 1)} dx$

(f)  $\int \frac{x + 3}{(x - 1)^2(x + 1)} dx$

(g)  $\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{(x^2 + 1)x} dx$

(h)  $\int \frac{2x - 4}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx$

<b>Função</b>	<b>Primitiva</b>
1) $f' f^p$	$\frac{f^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
2) $f' a^f$	$\frac{a^f}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
3) $\frac{f'}{f}$	$\ln  f  + C$
4) $f' \cos(f)$	$\sin(f) + C$
5) $f' \sin(f)$	$-\cos(f) + C$
6) $f' \sec^2(f)$	$\tan(f) + C$
7) $f' \operatorname{cosec}^2(f)$	$-\cot(f) + C$
8) $f' \sec(f) \tan(f)$	$\sec(f) + C$
9) $f' \operatorname{cosec}(f) \cot(f)$	$-\operatorname{cosec}(f) + C$
10) $\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\arcsin(f) + C \quad \text{ou} \quad -\arccos(f) + C$
11) $\frac{f'}{1+f^2}$	$\arctan(f) + C \quad \text{ou} \quad -\operatorname{arccot}(f) + C$
12) $f' \tan(f)$	$-\ln  \cos(f)  + C$
13) $f' \cot(f)$	$\ln  \sin(f)  + C$
14) $f' \sec(f)$	$\ln  \sec(f) + \tan(f)  + C$
15) $f' \operatorname{cosec}(f)$	$\ln  \operatorname{cosec}(f) - \cot(f)  + C$

Tabela 1: Tabela de primitivas imediatas.

<b>Tipo de função</b>	<b>Substituição</b>
1) $R(a^{c_1x}, a^{c_2x}, \dots, a^{c_nx})$	$a^{mx} = t \Leftrightarrow x = \frac{\log_a(t)}{m}$ onde $m = m.d.c.(c_1, c_2, \dots, c_n)$
2) $R(\log_a(x))$	$t = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^t$
3) $R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \sin(t)$ ou $x = \frac{a}{b} \cos(t)$
4) $R(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \tan(t)$
5) $R(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{b} \sec(t)$
6) $R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a - bx})$	$x = \frac{a}{b} \sin^2(t)$
7) $R(x, \sqrt{x}, \sqrt{a + bx})$	$x = \frac{a}{b} \tan^2(t)$
8) $R(x, \sqrt{x}, \sqrt{bx - a})$	$x = \frac{a}{b} \sec^2(t)$

Tabela 2: Tabela de primitivas por substituição.

## I - Potências de funções trigonométricas

Dividimos esta secção em 5 casos.

1 - Potências ímpares de  $\sin(x)$  ou  $\cos(x)$  – Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula fundamental da trigonometria:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

2 - Potências pares de  $\sin(x)$  ou  $\cos(x)$  – Usam-se as fórmulas da redução ao cosseno do ângulo duplo:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

3 - Potências de  $\tan(x)$  ou  $\cotg(x)$  – Destaca-se  $\tan^2(x)$  ou  $\cotg^2(x)$  e usa-se uma das fórmulas:

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 \quad \text{ou} \quad \cotg^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1.$$

4 - Potências pares de  $\sec(x)$  ou  $\operatorname{cosec}(x)$  – Destaca-se  $\sec^2(x)$  ou  $\operatorname{cosec}^2(x)$  e ao fator resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \text{ou} \quad \operatorname{cosec}^2(x) = 1 + \cotg^2(x).$$

5 - Potências ímpares de  $\sec(x)$  ou  $\operatorname{cosec}(x)$  – Destaca-se  $\sec^2(x)$  ou  $\operatorname{cosec}^2(x)$  e primitiva-se por partes começando por esse fator.

## II - Produtos de potências de funções trigonométricas

1 - Potência ímpar em  $\sin(x)$  por qualquer potência em  $\cos(x)$  – Destaca-se  $\sin(x)$  e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula:

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x).$$

2 - Potência ímpar em  $\cos(x)$  por qualquer potência de  $\sin(x)$  – Destaca-se  $\cos(x)$  e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula:

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x).$$

3 - Potência par em  $\cos(x)$  por potência par em  $\sin(x)$  – Aplicam-se as fórmulas:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x); \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)); \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

## III - Produtos em que aparecem fatores do tipo $\sin(mx)$ e/ou $\cos(nx)$

Aplicam-se as fórmulas:

- $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y));$
- $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x + y) + \cos(x - y));$
- $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)).$